લિબર્ટી પેપરસેટ

ધોરણ 12 : ગણિત

Full Solution

સમય : 3 કલાક

અસાઈનમેન્ટ પ્રશ્નપત્ર 11

PART A

1. (D) **2.** (D) **3.** (C) **4.** (D) **5.** (B) **6.** (B) **7.** (C) **8.** (C) **9.** (D) **10.** (A) **11.** (C) **12.** (A) **13.** (C) **14.** (C) **15.** (B) **16.** (A) **17.** (A) **18.** (A) **19.** (B) **20.** (A) **21.** (C) **22.** (D) **23.** (D) **24.** (B) **25.** (B) **26.** (A) **27.** (A) **28.** (D) **29.** (C) **30.** (B) **31.** (B) **32.** (B) **33.** (B) **34.** (D) **35.** (B) **36.** (B) **37.** (B) **38.** (D) **39.** (A) **40.** (C) **41.** (A) **42.** (B) **43.** (C) **44.** (B) **45.** (C) **46.** (B) **47.** (D) **48.** (A) **49.** (A) **50.** (C)

PART B

વિભાગ-A

1.

$\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \theta$ ધારો.

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}[2\cos 2\theta]$

$= \tan^{-1}[2(1 - 2\sin^2\theta)]$

$= \tan^{-1}\left[2\left(1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right] \quad \left(\because \sin\theta = \frac{1}{2}\right)$

$= \tan^{-1}\left[2\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right]$

$= \tan^{-1}\left[2 \times \frac{1}{2}\right]$

$= \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

અથવા

$= \tan^{-1}\left(2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \tan^{-1}\left(2\cos\left(2\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$

$= \tan^{-1}\left(2\cos\left(2\frac{\pi}{6}\right)\right) \quad \left(\because \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$= \tan^{-1}\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$= \tan^{-1}\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)$

$= \tan^{-1}(1)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{4} \quad \left(\because \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

2.

ધારો કે, $\tan^{-1}(\cos x) = \alpha$

$\therefore \cos x = \tan\alpha$

$\therefore 2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

$\therefore 2\alpha = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

$\therefore \tan 2\alpha = 2\operatorname{cosec} x$

$\therefore \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = 2\operatorname{cosec} x$

$\therefore \frac{2\cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{2}{\sin x} \quad (\because \tan\alpha = \cos x)$

$\therefore 2\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$

$\therefore \frac{\cos x}{\sin x} = 1 \quad (\because \sin x \neq 0)$

$\therefore \tan x = 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$

ચકાસણી :

ડા.બા. $= 2\tan^{-1}(\cos x)$

$= 2\tan^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{1}\right)$$

$$= \tan^{-1}(2\sqrt{2})$$

જ.બા. $= \tan^{-1}(2\operatorname{cosec}x)$

$$= \tan^{-1}\left(2\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \tan^{-1}(2\sqrt{2})$$

∴ ડા.બા. = જ.બા.

∴ ઉકેલ ગણ $= \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

3.

➪ f એ $x = \pi$ આગળ સતત છે.

$$\therefore \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = f(\pi)$$

$$\therefore \lim_{x\to\pi^+} (\cos x) = \lim_{x\to\pi^-} (kx+1)$$

$$\left[\begin{array}{l}\because x\to\pi^+\\ \Rightarrow x>\pi\\ \Rightarrow f(x)=\cos x\end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{l}\because x\to\pi^-\\ \Rightarrow x<\pi\\ \Rightarrow f(x)=kx+1\end{array}\right]$$

$\therefore \quad \cos\pi = k\pi + 1$

$\therefore \quad -1 = k\pi + 1$

$\therefore \quad k\pi = -2$

$\therefore \quad k = \frac{-2}{\pi}$

4.

➪ $I = \int \tan^4 x\, dx$

$$= \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^2 x\,(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan^2 x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^2 x\,\frac{d}{dx}(\tan x)\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan^2 x\,\frac{d}{dx}(\tan x)\, dx - \int \sec^2 x\, dx + \int 1\, dx$$

$$\therefore I = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$$

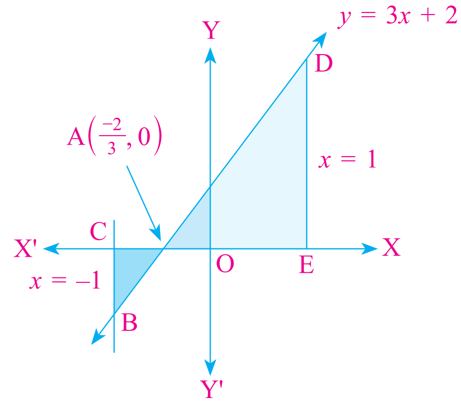
5.

➪ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે રેખા $y = 3x + 2$,

X-અક્ષને $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$માં છેદે છે અને આ

આલેખ $x \in \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ માટે X-અક્ષની નીચે છે અને

આલેખ $x \in \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ માટે X-અક્ષની ઉપર છે.



માંગેલ ક્ષેત્રફળ

= પ્રદેશ ACBAનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ ADEAનું ક્ષેત્રફળ

$$= \left|\int_{-1}^{-\frac{2}{3}} (3x+2)\, dx\right| + \int_{-\frac{2}{3}}^{1} (3x+2)\, dx$$

$$= \left|\left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)_{-1}^{-\frac{2}{3}}\right| + \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)_{-\frac{2}{3}}^{1}$$

$$= \left|\left(\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}(1) + 2(-1)\right)\right| + \left(\frac{3}{2}(1) + 2(1)\right) - \left(\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}\right) + 2\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$= \left|\frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2} + 2\right| + \frac{3}{2} + 2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= \left|\frac{-2}{3} - \frac{3}{2} + 2\right| + \frac{3}{2} + 2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left|\frac{-4-9+12}{6}\right| + \frac{9+12+4}{6}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{25}{6}$$

$$= \frac{26}{6}$$

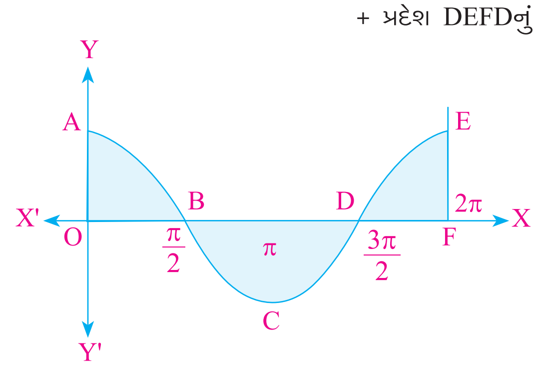
$= \frac{13}{3}$ ચોરસ એકમ

6.

➪ આકૃતિ પરથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ

= પ્રદેશ OABOનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ BCDBનું ક્ષેત્રફળ

+ પ્રદેશ DEFDનું ક્ષેત્રફળ



∴ માંગેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cosx\, dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cosx\, dx \right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} cosx\, dx$$

$$= (sin\, x)_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \left| (sin\, x)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right| + (sin\, x)_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= \left(sin\frac{\pi}{2} - sin\, 0 \right) + \left| sin\frac{3\neq}{2} - sin\frac{\neq}{2} \right| + sin\, 2\pi - sin\frac{3\pi}{2}$$

$= (1 - 0) + |-1 - 1| + 0 - (-1)$

$= 1 + 2 + 1$

$= 4$ ચોરસ એકમ

7.

➪ $(e^x + e^{-x})\, dy - (e^x - e^{-x})\, dx = 0$

$$\therefore\ dy = \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}\, dx$$

→ બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\therefore \int dy = \int \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}\, dx$$

$$\therefore \int dy = \int \frac{\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}\, dx$$

$\therefore\ y = log\,(e^x + e^{-x}) + c;$

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

8.

➪ અહીં,

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \\ &= (2)^2 - 2(4) + (3)^2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

તેથી, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$

9.

➪ અહીં; $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$

$\therefore\ L : \vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})$

$\vec{b_1} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$

તથા $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

$\therefore\ M : \vec{r} = (-2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(-\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})$

$\vec{b_2} = -\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$

$$\begin{aligned} \vec{b_1} \cdot \vec{b_2} &= (2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}) \\ &= -2 + 40 - 12 \\ &= 26 \\ |\vec{b_1}| &= \sqrt{4+9+25} \\ &= \sqrt{38} \\ |\vec{b_2}| &= \sqrt{1+64+16} \\ &= \sqrt{81} \\ &= 9 \end{aligned}$$

જો L અને M વચ્ચેનો ખૂણો α હોય તો,

$$cos\,\alpha = \frac{|\vec{b_1} \cdot \vec{b_2}|}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}$$

$$cos\,\alpha = \frac{|26|}{\sqrt{38}\ 9}$$

$$\therefore\ \alpha = cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$$

આથી, બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ મળે.

10.

➪ રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

$\therefore\ A(\vec{a}) = (0, 0, 0)$

$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

રેખાની દિશા $\vec{b} = \hat{i}$ ($\because$ રેખા x-અક્ષને સમાંતર છે.)

રેખાનું સદિશ સમીકરણ,

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b},\ \lambda \in R$

$\therefore\ \vec{r} = (0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) + \lambda\hat{i}$

રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ,

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$$

$$\therefore\ \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$$

11.

➪ ઘટના A : પત્તું પસંદ કરતાં તે કાળા રંગનું હોય

$$P(A) = \frac{^{26}C_1}{^{52}C_1} = \frac{1}{2}$$

પુરવણી વગર,

ઘટના B : પત્તું પસંદ કરતાં તે કાળા રંગનું છે.

$$P(B \mid A) = \frac{^{25}C_1}{^{51}C_1}$$

$$= \frac{25}{51}$$

$\therefore$ બંને કાળા રંગના હોય તેની સંભાવના,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{1}{2} \times \frac{25}{51} = \frac{25}{102}$$

12.

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\therefore n = 4$

(i) **E : એક સિક્કા પર કાંટો મળે.**

E : {HT, TH}

અહીં, $r = 2$

$$\therefore P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

F : એક સિક્કા પર છાપ મળે.

F : {HT, TH}

અહીં, $r = 2$

$$\therefore P(F) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(E \cap F) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

વિભાગ-B

13.

અહીં R પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$S = \{(a, b) : a \le b\}$

ધારો કે, $(a, a) \in S$

$\therefore$ $a \le a$ જે સત્ય છે. $\forall\ a \in R$

$\therefore$ ધારણા સાચી છે.

$\therefore$ S એ સ્વવાચક છે.

ધારો કે, $(a, b) \in S$

$a \le b$

$b \le a$

$(b, a) \notin S$ ($\because$ $a \le b$ તથા $b \le a$ એકસાથે સત્ય ન હોઈ શકે.)

$\therefore$ S એ સંમિત નથી.

ધારો કે, $(a, b) \in S$ તથા $(b, c) \in S$

$\therefore$ $a \le b$ તથા $b \le c$

$\therefore$ $a \le c$

$\therefore$ $(a, c) \in S$

$\therefore$ S એ પરંપરિત છે.

આમ, સંબંધ S એ સ્વવાચક છે, સંમિત નથી, પરંપરિત છે.

14.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

હવે, $P = \frac{1}{2}(A + A^T)$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3+3 & 5+1 \\ 1+5 & -1-1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $P = P^T$

$\therefore$ P એ સંમિત શ્રેણિક છે.

$Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3-3 & 5-1 \\ 1-5 & -1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Q^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore -Q^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $Q = -Q^T$

$\therefore$ Q એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

$$\therefore P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+0 & 3+2 \\ 3-2 & -1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A$$

15.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+1+1 & -2-2-1 & 2+1+2 \\ -2-2-1 & 1+4+1 & -1-2-2 \\ 2+1+2 & -1-2-2 & 1+1+4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A$$

$$\therefore \quad A^3 = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+5+5 & -6-10-5 & 6+5+10 \\ -10-6-5 & 5+12+5 & -5-6-10 \\ 10+5+6 & -5-10-6 & 5+5+12 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

ડા.બા. $= A^3 - 6A^2 + 9A - 4I$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -36 & 30 & -30 \\ 30 & -36 & 30 \\ -30 & 30 & -36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & -9 & 9 \\ -9 & 18 & -9 \\ 9 & -9 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-36+18-4 & -21+30-9+0 & 21-30+9+0 \\ -21+30-9+0 & 22-36+18-4 & -21+30-9+0 \\ 21-30+9+0 & -21+30-9+0 & 22-36+18-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= O$

$=$ જ.બા.

$A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$

બંને બાજુ A^{-1} વડે ગુણતાં,

$\therefore \quad (A^3)A^{-1} - 6A^2(A^{-1}) + 9AA^{-1} + 4IA^{-1} = OA^{-1}$

$\therefore \quad A^2 - 6A + 9I - 4A^{-1} = O$

$\therefore \quad 4A^{-1} = A^2 - 6A + 9I$

$$\therefore \quad 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 6 & -6 \\ 6 & -12 & 6 \\ -6 & 6 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

16.

$$f(x) = \begin{cases} 5 & , \quad x \leqslant 2 \\ ax+b & , \quad 2 < x < 10 \\ 21 & , \quad x \geqslant 10 \end{cases}$$

અહીં, f એ $x = 2$ આગળ સતત છે.

$$\therefore \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 2^+} (ax + b) = \lim_{x \to 2^-} 5$$

$$\left(\begin{array}{l} \because x \to 2^+ \\ \Rightarrow x > 2 \\ \Rightarrow f(x) = ax + b \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \because x \to 2^- \\ \Rightarrow x < 2 \\ \Rightarrow f(x) = 5 \end{array}\right)$$

$\therefore \quad 2a + b = 5$ ... (1)

હવે, f એ $x = 10$ આગળ સતત છે.

$$\therefore \quad \lim_{x \to 10^+} f(x) = \lim_{x \to 10^-} f(x) = f(10)$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 10^+} 21 = \lim_{x \to 10^-} ax + b$$

$$\left(\begin{array}{l} \because x \to 10^+ \\ \Rightarrow x > 10 \\ \Rightarrow f(x) = 21 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \because x \to 10^- \\ \Rightarrow x < 10 \\ \Rightarrow f(x) = ax + b \end{array}\right)$$

$\therefore \quad 21 = 10a + b$

$\therefore \quad 10a + b = 21$ .... (2)

સમીકરણ (1) અને (2) નો ઉકેલ કરતાં,

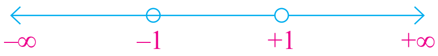
$$\begin{array}{r} 10a + b = 21 \\ 2a + b = 5 \\ - \quad - \quad - \\ \hline 8a = 16 \\ a = 2 \end{array}$$

a ની કિંમત સમીકરણ (1) માં મૂકતાં,

$2(2) + b = 5$

$\therefore \quad b = 1$

17.



$I = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ લેતાં,

$I \cap [-1, 1] = \phi$

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$\therefore \; f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ .... (1)

હવે, $I = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$\rightarrow \; x^2 > 1$

$\therefore \; \dfrac{1}{x^2} < 1$

$\therefore \; \dfrac{-1}{x^2} > -1$

$\therefore \; 1 - \dfrac{1}{x^2} > 0$

$\therefore \; f'(x) > 0$ ($\because$ પરિણામ (1) પરથી)

$\therefore \; f$ એ $I = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ પર ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

18.

અહીં, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$ અને

$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 0$ તથા

$\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ આપેલ છે. .... (1)

હવે, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

$+ \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c})$

$+ \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \cdot \vec{c}$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$

($\because$ પરિણામ (1))

$= 9 + 16 + 25$

$= 50$

તેથી, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$

19.

બે રેખાઓ સમાંતર છે.

આપણી પાસે $\vec{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$,

$\vec{a_2} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ અને

$\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ છે.

આથી, રેખાઓ વચ્ચેનું અંતર

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b}|} \right|$$

$$= \left| \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \right|$$

$$= \frac{|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}|}{\sqrt{49}}$$

$$= \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}}$$

$$= \frac{\sqrt{293}}{7} \text{ એકમ}$$

20.

$2x + y \geq 3$

$x + 2y \geq 6$ હેતુલક્ષી વિધેય $Z = x + 2y$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$2x + y = 3$ ... (i)

x	0	$\frac{3}{2}$
y	3	0

(0, 3) ✓

$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ×

$x + 2y = 6$ ... (ii)

x	0	6
y	3	0

(0, 3) ✓

(6, 0) ×

(i) અને (ii) નો ઉકેલ,

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 2x + 4y &= 12 \\ - \quad - \quad &\;\; - \\ \hline 3y &= 9 \end{aligned}$$

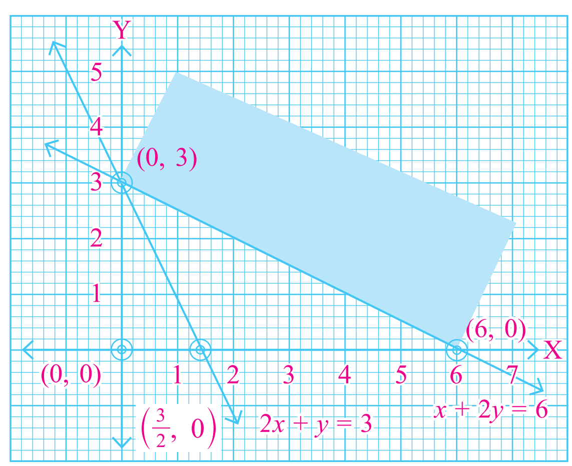
$\therefore \; y = 3$

y = 3 ને $2x + y = 3$માં મૂકતાં,

$2x + 3 = 3$

$2x = 0$

$x = 0$



આકૃતિમાં આપેલ અસમતાઓનો આલેખ દર્શાવ્યો છે જે સિમિત છે.

શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 3) અને (6, 0) મળે.

શક્ય ઉકેલ પ્રદેશના શિરોબિંદુ	$Z = 3x + 5y$
(0, 3)	6 } ← ન્યૂનતમ
(6, 0)	6

➪ આમ, (0, 3) અને (6, 0) બિંદુઓને જોડતાં રેખાખંડ પરના દરેક બિંદુએ Zનું ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે છે.

21.

➪ ધારો કે દર્દીને હૃદયરોગનો હુમલો થવાની શક્યતા 40% છે. એ પણ ધારેલ છે કે ધ્યાન અને યોગાસનોનો અભ્યાસ હૃદયરોગના હુમલાનું જોખમ 30% ઘટાડે છે.

ઘટના E_1 : વ્યક્તિ ધ્યાન અને યોગાસનનો કાર્યક્રમ અનુસરે છે.

ઘટના E_2 : વ્યક્તિ દાક્તરી દવાચિઠ્ઠીને પસંદ કરે છે.

$P(E_1) = \frac{1}{2}$; $P(E_2) = \frac{1}{2}$

ઘટના A : વ્યક્તિ હૃદયરોગના હુમલાથી પીડિત છે.

વ્યક્તિ હૃદયરોગના હુમલાથી પીડિત છે અને તે ધ્યાન અને યોગાસનનો ઉપયોગ કરે તેની સંભાવના,

$\therefore P(E_1 \mid A) = \dfrac{P(E_1) \cdot P(A \mid E_1)}{P(A)}$

$\therefore P(A \mid E_1)$ = વ્યક્તિ ધ્યાન અને યોગાભ્યાસનો ઉપયોગ કરે અને હૃદયરોગથી પીડિત હોય (30% ઘટે એટલે 70%)

$= \frac{40}{100}$ ના 70%

$= 0.4 \times \frac{70}{100} = 0.28$

$\therefore P(A \mid E_2)$ = વ્યક્તિ દાક્તરી દવાચિઠ્ઠીનો ઉપયોગ કરે અને હૃદયરોગના હુમલો ઓછો થાય. (25% ઘટાડો એટલે 75%)

= 0.4ના 75%

$= 0.4 \times \frac{75}{100}$

$= 0.75 \times 0.4 = 0.3$

$\therefore P(A) = P(E_1) \cdot P(A \mid E_1) + P(E_2) \cdot P(A \mid E_2)$

$= \frac{1}{2} \times 0.28 + \frac{1}{2} \times 0.3$

$= 0.14 + 0.15$

$= 0.29$

$\therefore P(E_1 \mid A) = \dfrac{\frac{1}{2} \times 0.28}{0.29}$

$= \frac{14}{29}$

વિભાગ-C

22.

➪ 10 ડઝન $= 10 \times 12 = 120$ નંગ

8 ડઝન $= 8 \times 12 = 96$ નંગ

$\therefore$ રસાયણવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકોની સંખ્યા = 120 નંગ

ભૌતિકવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકોની સંખ્યા = 96 નંગ

અર્થશાસ્ત્રના પુસ્તકોની સંખ્યા = 120 નંગ

રસાયણવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકની વેચાણ કિંમત ₹ 80

ભૌતિકવિજ્ઞાનનાં પુસ્તકની વેચાણ કિંમત ₹ 60

અર્થશાસ્ત્રના પુસ્તકની વેચાણ કિંમત ₹ 40

$\therefore$ કુલ વેચાણ કિંમત

$= [120 \quad 96 \quad 120] \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix}$

$= [120 \times 80 + 96 \times 60 + 120 \times 40]$

$= [9600 + 5760 + 4800]$

$\therefore$ કુલ વેચાણ કિંમત = [20160]

ભંડારને મળેલ કુલ રકમ ₹ 20,160 હોય.

23.

➪ શ્રેણિક સ્વરૂપે લખતાં,

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore AX = B$

જ્યાં, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$AX = B$

$\therefore X = A^{-1}B$

➪ A^{-1} શોધવા માટે,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1(1 + 3) + 1(2 + 3) + 1(2 - 1)$

$= 4 + 5 + 1$

$= 10 \neq 0$

$\therefore$ અનન્ય ઉકેલ મળે.

➪ *adj* A મેળવવા માટે,

1 નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(1 + 3)$

$= 4$

-1 નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(2 + 3)$

$= -5$

1 નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(2 - 1)$

$= 1$

2 નો સહઅવયવ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-1 - 1)$

$= 2$

1 નો સહઅવયવ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(1 - 1)$

$= 0$

-3નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(1 + 1)$

$= -2$

1 નો સહઅવયવ $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

$= 1(3 - 1)$

$= 2$

1 નો સહઅવયવ $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-3 - 2)$

$= 5$

1 નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(1 + 2)$

$= 3$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 16+0+4 \\ -20+0+10 \\ 4+0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$

24.

➪ $f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$ ની

બંને બાજુ *log* લેતાં,

$$log(f(x)) = log\ ((1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8))$$

$$\therefore\ log(f(x)) = log\ (1 + x) + log\ (1 + x^2) + log\ (1 + x^4) + log\ (1 + x^8)$$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x) = \left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right]$$

$$\therefore\ f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right]$$

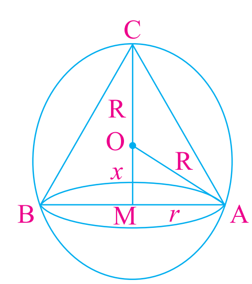
$$\therefore\ f'(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right]$$

$$\therefore\ f'(1) = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1)\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{4}{2} + \frac{8}{2}\right]$$

$$= (2)(2)(2)(\cancel{2})\left[\frac{1+2+4+8}{\cancel{2}}\right] = (8)\ (15)$$

$$\therefore\ f'(1) = 120$$

25.



➪ ધારો કે શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા r છે.

$OM = x$ ધારો

આકૃતિ પરથી, શંકુની ઊંચાઈ $h = R + x$

અહીં, ΔOMAમાં, $R^2 = x^2 + r^2$ .... (1)

$\therefore$ શંકુનું ઘનફળ V

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 (x + R)$$

$$= \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2)(x + R) \quad \text{(પરિણામ (1))}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3} \pi (R^2 x + R^3 - x^3 - x^2 R)$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{3} \pi (R^2 + 0 - 3x^2 - 2xR)$$

$$\therefore f''(x) = \frac{1}{3} \pi (-6x - 2R)$$

$$= -\frac{1}{3} \pi (6x + 2R) < 0$$

($\because x > 0$ તથા $R > 0$)

$\therefore f$ ને મહત્તમ મૂલ્ય મળે છે.

$\rightarrow$ હવે, શંકુનું મહત્તમ ઘનફળ મેળવવા માટે,

$$f'(x) = 0$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} (R^2 - 3x^2 - 2xR) = 0$$

$$\therefore R^2 - 2xR - 3x^2 = 0$$

$$\therefore R^2 - 3xR + xR - 3x^2 = 0$$

$$\therefore R(R - 3x) + x(R - 3x) = 0$$

$$\therefore (x + R)(R - 3x) = 0$$

$\therefore x = -R$ કે $x = \frac{R}{3}$

$x > 0$ હોવાથી $x = -R$ શક્ય નથી.

$$\therefore x = \frac{R}{3}$$

શંકુની ઊંચાઈ $(h) = x + R$

$$= \frac{R}{3} + R$$

$$\therefore h = \frac{4R}{3}$$

શંકુની પાયાની ત્રિજ્યા, $r^2 = R^2 - x^2$ (પરિણામ (1))

$\rightarrow$ શંકુનું ઘનફળ (V) $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2)\left(\frac{4R}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right)\left(\frac{4R}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{8R^2}{9}\right)\left(\frac{4R}{3}\right)$$

$$\therefore V = \frac{8}{27} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$\therefore$ શંકુનું ઘનફળ $= \frac{8}{27} \times$ ગોલકનું ઘનફળ

26.

રીત 1 :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{a^2 \cos^2 (\pi - x) + b^2 \sin^2 (\pi - x)} dx$$

(ગુણધર્મ (6) પરથી)

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - I$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$\text{તેથી } I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad \text{(ગુણધર્મ (7) પરથી)}$$

$$= \pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right]$$

$$= \pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\,dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{cosec}^2 x\,dx}{a^2 \cot^2 x + b^2} \right]$$

($\because$ પ્રથમ સંકલનમાં $\cos^2 x$ વડે ભાગતાં અને બીજા સંકલનમાં $\sin^2 x$ વડે ભાગતાં)

$$= \pi \left[\int_0^{1} \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} - \int_1^{0} \frac{du}{a^2 u^2 + b^2} \right]$$

(પ્રથમ અને બીજા સંકલનમાં અનુક્રમે $\tan x = t$ અને $\cot x = u$ લેતાં)

$$= \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \frac{bt}{a} \right]_0^1 - \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \frac{au}{b} \right]_1^0$$

$$= \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \frac{b}{a} + \tan^{-1} \frac{a}{b} \right] = \frac{\pi^2}{2ab}$$

રીત 2 :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx \quad \dots (1)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{a^2 \cos^2 (\pi - x) + b^2 \sin^2 (\pi - x)} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx$$

$$I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx - \int_0^{\pi} \frac{x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx$$

$$\therefore \quad I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx - I$$

($\because$ પરિણામ (1) પરથી)

$$\therefore \quad 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \cos^2 (\pi - x) + b^2 \sin^2 (\pi - x)} \, dx \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \, dx \right]$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} \, dx$$

($\because$ દરેક પદને $\cos^2 x \neq 0$ વડે ભાગતાં)

અહીં, $\tan x = t$ આદેશ લેતાં,

$\sec^2 x \, dx = dt$

$x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to \infty$

$$= \pi \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\frac{bt}{a} \right) \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{ab} (\tan^{-1} (\infty) - \tan^{-1}(0))$$

$$= \frac{\pi}{ab} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{2ab}$$

27.

$$\therefore \quad \frac{\tan^{-1} y - x}{1 + y^2} = \frac{dx}{dy}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2} - \frac{x}{1 + y^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} + \frac{x}{1 + y^2} = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2}$$

$$\therefore \quad P(y) = \frac{1}{1 + y^2}, \; Q(y) = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2}$$

$\therefore$ સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy}$

$= e^{\tan^{-1} y}$

$\to$ આમ, આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ,

$$x e^{\tan^{-1} y} = \int \left(\frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2} \right) e^{\tan^{-1} y} \, dy + c$$

ધારો કે,

$$I = \int \left(\frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2} \right) e^{\tan^{-1} y} \, dy$$

$\tan^{-1} y = t$ મૂકતાં,

$$\left(\frac{1}{1 + y^2} \right) dy = dt$$

$$\therefore \quad I = \int t e^t \, dt$$

$$= t e^t - \int 1 \cdot e^t \, dt$$

$$= t e^t - e^t + c$$

$$= e^t (t - 1) + c$$

$$I = e^{\tan^{-1} y} (\tan^{-1} y - 1) + c$$

I ની કિંમત સમીકરણ (2) માં મૂકતાં,

$$x e^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y} (\tan^{-1} y - 1) + c$$

$$\therefore \quad x = (\tan^{-1} y - 1) + c \, e^{-\tan^{-1} y}$$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.